

i, a més, si fem servir (*) i, novament, la desigualtat de Cauchy, obtenim:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k A_{k+1}} \right) \left(\sum_{k=1}^n A_k M_k^2 \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k A_{k+1}} \right) \left(\sum_{k=1}^n M_k A_{k+1}^2 \right) \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^n \frac{M_k A_{k+1}}{A_k A_{k+1}} \right)^2 \end{aligned}$$

Però, com que

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k M_k}{A_k A_{k+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{M_k A_{k+1}}{A_k A_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{A_k A_{k+1}}{A_k A_{k+1}} = n$$

aleshores un dels dos sumands de l'esquerra ha de ser més gran o igual que $\frac{n}{2}$ i, per tant,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k A_{k+1}} \right) \left(\sum_{k=1}^n A_k M_k^2 \right) \geq \left(\frac{n}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

com volem demostrar.

Observem que la igualtat es verifica si, i només si, M_k és el punt mitjà de $A_k A_{k+1}$ per tot k .

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- MERCÈ CLAVEROL AGUAS va llegir la seva tesi, dirigida per Ferran Hurtado Díaz i Manuel Abellanas Oar, titulada *Problemas geométricos en morfología computacional*, el dia 16 de novembre de 2004. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Aquesta tesi es divideix en dues parts. La primera part conté l'estudi de tres pesos o profunditats, associats a conjunts finits de punts en el pla: el pes definit per les capes convexes, *convex depth* (introduït per Hubert, 1972, i Barnett, 1976), la separabilitat lineal, també coneguda com *location*, *halfspace* o *Tukey depth* (Tukey, 1975) i el pes Delaunay. De la noció de pes, s'obté una estratificació dels conjunts de punts en el pla en capes i una partició del pla en regions o nivells. Les fronteres dels nivells són conegudes per *depth contours*. Es defineixen els conceptes de *capa* i *nivell* en els tres pesos assenyalats i s'estudien propietats i complexitats. Chazelle va obtenir un algorisme per calcular en temps òptim les capes convexes, que coincideixen amb les fronteres dels nivells convexos. En aquesta tesi, per als pesos de separabilitat lineal i Delaunay, es proporcionen algorismes d'obtenció, tant de capes com de nivells, i de

càlcul del pes d'un punt nou que s'incorpori al conjunt donat. De manera independent, han estat obtinguts pel pes de la separabilitat lineal els algorismes de construcció dels nivells, *location depth contours*, i el de càlcul del pes d'un punt nou, per Miller *et al.* (2001).

Per als tres pesos mencionats, s'analitzen arbres generadors, poligonitzacions o triangulacions, amb pes mínim, on el pes s'ha considerat com la suma dels pesos de les arestes de tals estructures. S'obtenen propietats generals entorn de la caracterització d'aquestes estructures i algorismes d'obtenció per a alguna d'elles.

Es defineixen dos pesos relacionats amb la separabilitat mitjançant cunyes: el pes segons dominació isotètica i la separabilitat α . En ambdós, es donen algorismes per al càlcul dels pesos dels punts d'un conjunt donat. La separabilitat α està estretament relacionada amb l'enumeració eficient de (α, k) -sets. Es realitza

un estudi combinatori del conjunt de (α, k) -sets per a conjunts de punts en el pla i es descriuen algorismes de construcció de tots els (α, k) -sets en cadascun dels quatre casos possibles, segons siguin, α o k , fixos o variables.

En la segona part, es tracten diversos problemes de transversalitat. S'obtenen resultats sobre la caracterització de les permutacions realitzables, tant com polígons simples, com convexos, sobre arranjaments de rectes.

- GISELA PUJOL VÁZQUEZ va llegir la seva tesi, dirigida per José Rodellar i Josep Maria Rossell, titulada *Contribució al control fiable de sistemes interconnectats amb incerteses*, el dia 19 de novembre de 2004. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.



En aquesta tesi, presentem una solució per a dos problemes rellevants en la teoria de control: el problema del cost quadràtic garantit i el problema del control H_∞ , per a un cert tipus de sistemes. Considerem els sistemes interconnectats lineals amb incerteses, sota la presència de fallades en els actuadors, i dissenyem controls descentralitzats que, a més a més d'assegurar estabilitat, resolen aquests dos problemes. Treballem amb tres models diferents d'incerteses: incerteses normades o acotades, incerteses definides sobre un polítop i incerteses que segueixen el model multiconvex. El model de fiabilitat emprat permet plantejar-se tant una fallada total en l'actuador com una fallada parcial. Els dos problemes tractats són:

- Problema del control RGC. Sintetitzar el control fiable sota fallada en els actuadors, que assegura estabilitat i garanteix un cert grau de rendiment o de cost, calculant una cota mínima per a la funció de cost.
- Problema del control robust. Dissenyar el control que assegura estabilitat interna sota pertorbacions en el sistema, i permet obtenir una cota per a la relació entre la pertorbació i la sortida controlable. Es considera la norma H_∞ del sistema, que representa l'increment màxim en energia, entre l'entrada i la sortida del sistema.

A l'hora de dissenyar ambdós controls, utilitzem les tècniques donades per les inequacions lineals matricials (LMI), que permeten una fàcil implantació numèrica. Així doncs, a part de

Per a col·leccions de segments en el pla, es defineixen cunya i cercle transversals separadors. Es realitza una anàlisi de l'ordre d'aquests elements transversals separadors i s'obtenen diversos algorismes de decisió d'existència dels mateixos i construcció de tots ells. Per a col·leccions de cercles, també es defineix el cercle transversal separador i s'obté un algorisme d'existència i construcció d'aquests cercles quan tots tenen el mateix radi.

tractar els problemes de la llei RGC i del control robust, hem determinat una relació general entre inequacions matricials lineals i no lineals, que permet obtenir caracteritzacions LMI per a un gran ventall de problemes de teoria de control. Les LMI que hem obtingut separen les dades del problema i les variables de disseny, i permeten una resolució menys restrictiva. En particular, faciliten l'ús de funcions de Lyapunov paramètriques que asseguren l'estabilitat del sistema quan una funció no paramètrica no arriba a fer-ho. La formulació per mitjà de les tècniques LMI ens ha permès obtenir implantacions numèriques efectives, així com relaxacions en les condicions d'estabilitat.

En el cas del problema del control RGC, trobem que quan es consideren fallades en el sistema, el model d'incerteses es veu reduït en certa manera, també perd llibertat en la definició de la funció de cost. Un cop sintetitzat el control RGC, presentem dues maneres que permeten obtenir una cota òptima del cost garantit, així com treure'n la dependència respecte de les condicions inicials. Hem dut a terme exemples numèrics que mostren l'eficiència dels mètodes enunciats, tractant els models d'incerteses normat i politòpic. Els resultats s'han obtingut usant el Toolbox LMI Control del programa Matlab.

El segon problema que ens plantegem és el del control estàtic realimentat per l'estat, tal que la norma H_∞ del sistema es troba acotada. Aquest fet assegura que l'efecte de pertorbacions en el sistema està dins de marges desitjats.

A més a més, la síntesi obtinguda és independent del model d'incerteses i, en el cas dels models normat i politòpic, hem obtingut una caracterització LMI. També fem un breu estudi

del control robust realimentat per la sortida, obtenint una caracterització en termes LMI, en el cas que no se suposin errors en la mesura de la sortida.

- MARIA TERESA GRAU MONTAÑA va llegir la seva tesi, dirigida per Javier Chavarriga Soriano i Héctor Giacomini, titulada *Contribution to the qualitative study of planar differential systems*, el dia 17 de desembre de 2004. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



La tesi versa sobre la teoria qualitativa dels sistemes diferencials en el pla i cada capítol conté un aspecte diferent. A la introducció, es dóna un resum dels resultats més coneguts i s'hi introdueix la notació que es fa servir al llarg de la tesi. En particular, s'hi estudia el problema de la integrabilitat i alguns resultats sobre la determinació de l'estabilitat d'un punt singular o d'una òrbita periòdica a fi de presentar els darrers capítols. El problema de la integrabilitat es defineix com el problema de trobar la integral primera d'un sistema d'equacions diferencials en el pla i determinar la classe funcional a la qual pertany. Els capítols 2 i 3 tracten el problema de la integrabilitat.

En el capítol 2 es dóna un resultat que permet trobar una expressió explícita per a una integral primera d'un cert tipus de sistemes polinomials. Mitjançant un canvi racional de variables, fem correspondre a una equació diferencial lineal homogènia de segon ordre: $A_2(x)w''(x) + A_1(x)w'(x) + A_0(x)w(x) = 0$, els coeficients de la qual són polinomials, a un sistema diferencial polinomial pla. Provem que aquest sistema té un invariant per a cada solució arbitrària no nul·la $w(x)$ de l'edo de segon ordre, que, quan $w(x)$ és un polinomi, dóna lloc a una corba algebraica invariant. A més, donem una expressió explícita per a una integral primera del sistema construïda a partir de dues solucions independents de l'edo de segon ordre. Aquesta integral primera no és, en general, una funció Liouvilliana. Finalment, verifiquem que tots els exemples coneguts de famílies de sistemes quadràtics amb una corba algebraica invariant de grau arbitràriament alt es poden descriure mitjançant aquesta construcció (mòdul transformacions biracionals).

En el capítol 3, les corbes algebraiques invariants d'un sistema diferencial polinomial pla tenen el paper fonamental. Si un sistema dife-

rencial polinomial pla té una corba algebraica invariant irreductible, aleshores els valors del seu cofactor en cadascun dels punts singulars no degenerats estan determinats. De fet, aquest valor és una combinació lineal a coeficients naturals dels valors propis associats al punt singular no degenerat. Aquests coeficients naturals es poden determinar completament en alguns casos depenent de la natura del punt singular. Així mateix, els punts de l'infinit també es poden tenir en compte. Un cop considerem el sistema en el pla projectiu complex, el grau d'una corba algebraica invariant esdevé un paràmetre del seu cofactor. Si considerem un sistema de grau d , aleshores té $d^2 + d + 1$ punts singulars (comptats amb la seva multiplicitat) i el cofactor d'una corba algebraica invariant té grau pel cap alt $d - 1$. Procedim de la manera següent: prenem un polinomi de grau $d - 1$ amb els seus $d(d+1)/2$ coeficients arbitraris i suposem que és el cofactor d'una corba algebraica invariant irreductible de grau n . Aleshores, imposem totes les condicions que ens donen els punts singulars no degenerats. En el cas general, imposem $d^2 + d + 1$ condicions i, així, podem determinar completament el cofactor i el grau de la corba, l'existència de la qual es pot determinar resolent un sistema d'equacions lineal, o trobem una condició d'incompatibilitat. D'aquesta manera, en general, podem determinar l'existència de totes les corbes algebraiques invariants d'un sistema.

El capítol 4 tracta sobre l'estabilitat d'una òrbita periòdica d'un sistema diferencial pla. Suposem que $f(x, y) = 0$ és una corba invariant irreductible que conté l'òrbita periòdica. Provem que les integrals sobre l'òrbita periòdica de la divergència i del cofactor coincideixen. Així, podem decidir sobre l'estabilitat de l'òrbita periòdica mitjançant la integració del cofactor sobre aquesta.

En el capítol 5, donem una aplicació dels resultats descrits en els capítols 3 i 4. Considerem els sistemes quadràtics amb un cicle límit algebraic coneguts fins al moment de la redacció d'aquesta tesi. Aquests cicles límit algebraics estan continguts en corbes algebraiques invariants de grau 2, 4, 5 i 6 i algunes d'aquestes famílies de sistemes quadràtics són biracionalment equivalents. Aplicant el mètode descrit en el capítol 3, mostrem que la corba algebraica invariant que conté el cicle límit és l'única corba algebraica invariant del sistema. Aprofitem aquest resultat per provar que aquests sistemes no tenen integral primera Liouvilliana. I aplicant la fórmula donada en el capítol 4, provem que aquests cicles límit algebraics són hiperbòlics.

El capítol 6 tracta sobre l'estudi i les propietats de la funció període associada a un punt

singular amb part lineal de tipus centre-focus. Com que el punt singular és sempre monodròmic, donada una secció transversal al flux amb el punt singular com a extrem, podem definir l'aplicació de Poincaré i la funció període associades a la secció. Diem que el punt és isòcron si podem trobar una secció tal que la seva funció període associada és constant. Aquesta definició generalitza la definició usual donada per centres a punts singulars qualssevol amb part lineal de tipus centre-focus. Caracteritzem aquesta propietat mitjançant simetries de Lie i formes normals, tot generalitzant els procediments coneguts per centres. Així mateix, donem un exemple d'una família de sistemes dependent d'un paràmetre real, que el seu origen és un punt singular amb part lineal de tipus centre-focus i que no és un punt isòcron per cap valor del paràmetre.

- GABRIELA LILIANA DAMILANO SCARPINELLO va llegir la seva tesi, dirigida per Pere Puig i Casado, titulada *Modelos de localización y escala. Algunas consideraciones teóricas y aplicaciones a pequeñas muestras*, el dia 14 de juliol de 2005. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



La tesi se centra principalment en l'estudi de les característiques i els procediments d'inferència d'uns destacats representants de les famílies de grups de transformacions: els models de localització i escala. D'una banda, es caracteritzen tots els models de localització simètrics per als quals una combinació lineal de la mitjana i mediana mostrals és un estimador asimptòticament eficient del paràmetre de localització. El model resultant, a tres paràmetres, pot entendre's com una distribució normal truncada simetritzada. Es presenten, a més, dos mètodes alternatius per estimar els paràmetres que, per les seves propietats asimptòtiques, resulten bons competidors dels estimadors de màxima versemblança (EMV): un basat en «la curiositat empírica» que es destaca per la seva senzillesa de càlcul i un «algorisme» iteratiu que pot implantar-se fàcilment usant programari estàndard que treballi amb la distribució normal truncada simple. També es realitzen estudis basats en simulacions a fi de comparar el comportament dels diferents estimadors quan la grandària mostral és petita. Al estendre aquest resultat al cas particular de l'esti-

mador de Hodges-Lehmann, es caracteritza la distribució logística com l'únic model de localització simètric per al qual aquest estimador és asimptòticament eficient. D'altra banda, s'investiguen els procediments d'inferència en models de localització i escala en presència de censura de tipus I (*time censored*) i es demostra una condició suficient per a la unicitat de l'EMV. A més, s'aplica l'estadístic Z^* de Barndorff-Nielsen, basat en l'aproximació asimptòtica d'ordre superior Saddlepoint, per a l'estimació per intervals de la mitjana poblacional de la distribució normal i el paràmetre d'escala de la distribució valor extrem (Log-Weibull); així mateix, i mitjançant simulacions, s'estudia el seu comportament per a petites mostres. En l'extensió al cas de dues mostres es considera la comparació de mitjanes per a mostres aparellades i independents (problema de Behrens-Fisher) i la comparació dels paràmetres d'escala de dues distribucions valor extrem. Si bé l'àmbit de la investigació es desenvolupa dins de l'estadística matemàtica, tots els tèmics tractats s'il·lustren amb exemples d'aplicació a situacions pràctiques.

- CARLES NOGUERA I CLOFENT va llegir la seva tesi, dirigida per Francesc Esteva i Joan Gispert, titulada *Estudi algebraic de les extensions axiomàtiques de lògiques borroses basades en normes triangulars*, el dia 11 de juliol de 2006. La tesi correspon al Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística de la Universitat de Barcelona.



El fundador de la lògica borrosa, Lotfi Zadeh, distingia el que anomenava *Fuzzy Logic in narrow sense* com a aquella part de la lògica borrosa que proposa i estudia sistemes lògics per tal de formalitzar el raonament aproximat. En aquests sistemes, normalment la connectiva de conjunció forta s'ha interpretat semànticament mitjançant una norma triangular (o t -norma, per més breuetat), sovint contínua, mentre que la connectiva d'implicació s'ha interpretat com el residu de la t -norma. En aquest sentit es diu que aquests sistemes de lògica borrosa estan basats en t -normes i els seus residus.

La condició necessària i suficient per tal que una t -norma tingui residu és que sigui contínua per l'esquerra. Tenint en compte aquest fet, i amb la intenció d'obtenir la lògica borrosa basada en t -normes més bàsica, Esteva i Godo van introduir el sistema MTL, que efectivament resultà ésser complet respecte de la semàntica donada per totes les t -normes contínues per l'esquerra i llurs residus.

Aquesta tesi és un intent de descriure les extensions axiomàtiques de MTL, tot parant una atenció especial a aquelles que al seu torn siguin també basades en t -normes. Ho hem fet des d'un punt de vista algebraic que explota el fet que totes aquestes lògiques són algebritzables per varietats de MTL-àlgebres. Per tant, el nostre estudi de les extensions axiomàtiques ha resultat ser, de fet, un estudi algebraic d'aquestes varietats en què l'objectiu final seria una descripció del reticle que configuren i de les seves propietats més rellevants. Malgrat que una descripció així encara no s'ha assolit, sí que, tanmateix, hem fet avenços significatius en aquesta direcció. Els podem classificar en dos grups: *a*) resultats que mostren la gran complexitat del reticle, i *b*) resultats que en descriuen algunes de les parts més tractables. Amb més precisió, els principals avenços són:

- A partir dels mètodes de rotació-annihilació per construir t -normes contínues per l'esquerra involutives, hem proposat una manera de descompondre les MTL-cadenes i hem estudiat alguns casos particulars de la descomposició. Això ens ha portat a desenvolupar una teoria de MTL-àlgebres perfectes, locals i bipartides.
- Hem provat que les IMTL-àlgebres perfectes coincideixen (llevat d'isomorfisme) amb les rotacions inconnexes dels *semihoops* prelineals.
- Hem demostrat que el reticle de varietats generades per IMTL-àlgebres perfectes és isomorf al reticle de totes les varietats de *semihoops* prelineals.
- S'ha demostrat un teorema de descomposició de qualsevol MTL-cadena com a suma ordinal de *semihoops* totalment ordenats indescomposables.
- Hem estudiat una classe particular de MTL-cadenes indescomposables (les cadenes feblement cancel·latives) i les seves lògiques associades.
- Hem estudiat les varietats de MTL-cadenes que compleixen una debilitació de la llei de contracció, la n -contracció. Aquesta condició garanteix que se satisfà un teorema de la reducció global.
- Hem concentrat l'estudi en una subvarietat particular d'àlgebres 3-contractives, les WNM-àlgebres.
- Finalment, hem estudiat les expansions de les lògiques basades en t -normes quan s'afegeixen al llenguatge constants per als valors de veritat intermedis, i hem examinat quins teoremes de completesa satisfan aquestes lògiques.